

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 11 класса, 2023–2024 учебный год

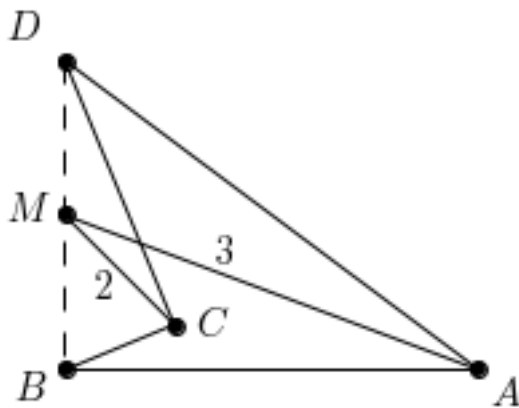
1. Жора бежит дистанцию в 100 метров. Он стартует со скоростью один метр в секунду, но, к сожалению, довольно быстро утомляется. После каждых 11 метров пути Жора решает, что надо бежать в два раза медленней. Сколько секунд пройдёт, прежде чем Жора достигнет финиша?

Ответ. 6133. **Решение.** Разобьем всю дистанцию на промежутки по 11 метров, при этом в конце останется последний промежуток длины 1 метр. В рамках каждого промежутка известно время для прохождения одного метра, поэтому можно найти ответ так: $11 \cdot (1 + 2 + \dots + 2^8) + 2^9 = 6133$.

2. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = c_1$ в точках $(10, c_1)$ и $(20, c_1)$, а прямую $y = c_2$ — в точках $(7, c_2)$ и (x_0, c_2) . Найдите число x_0 .

Ответ. 23. Решение. Заметим, что точки $(10, c_1)$ и $(20, c_1)$ симметричны относительно оси симметрии параболы. Как и точки $(7, c_2)$ и (x_0, c_2) . Тогда $\frac{10+20}{2} = x_1 = \frac{7+x_0}{2}$, где x_1 таков, что $y = x_1$ — ось симметрии параболы. Откуда $x_0 = 10 + 20 - 7 = 23$.

3. Вершина C невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABD . Известно, что $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Пусть M — середина диагонали BD . Известно, что $AM = 3$, $CM = 2$. Найдите AD^2 .



Ответ. 21. Решение. В прямоугольном треугольнике BDC медиана CM , проведённая к гипотенузе, равняется половине этой гипотенузы. Значит, $BM = 2$, $BD = 4$.

По теореме Пифагора для треугольника BMA : $AB^2 + BM^2 = AM^2$, откуда $AB^2 = 3^2 - 2^2 = 5$. По теореме Пифагора для треугольника ABD : $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 5 + 4^2 = 21$.

4. Линейная функция $p(x) = kx + \ell$ такова, что для некоторого действительного a выполнено

$$p(a) = 2, \quad p(p(a)) = 17, \quad p(p(p(a))) = 167.$$

Найдите a .

Ответ. 1/2. **Решение.** Условия $p(p(a) = 17$ и $p(p(p(a))) = 167$ можно записать как $p(2) = 17$ и $p(17) = 167$. Получаем систему линейных уравнений $2k + \ell = 17$, $17k + \ell = 167$. Решением этой системы будет $k = 10$, $\ell = -3$. Подставим найденные значения в условие $p(a) = 2$: $10a - 3 = 5$, откуда $a = 1/2$.

5. В коробке лежат n шариков трёх цветов: красного, синего и зелёного. Если достать из неё любые 52 шарика, то среди них обязательно окажется по крайней мере 12 синих и хотя бы по 8 красных и зелёных. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. 64. Решение. Обозначим количество красных, синих и зеленых шаров в коробке за K , C и Z . Если взять все красные, все синие и 7 зелёных шариков, то среди них не найдётся 8 зелёных. Значит, мы взяли не более 51 шарика, откуда $K + C \leq 44$. Аналогично $K + Z \leq 40$,

$$C + 3 \leq 44$$

. Складывая эти неравенства, получаем

$$2(K + C + 3) \leq 128,$$

т.е. $K + C + 3 \leq 64$.

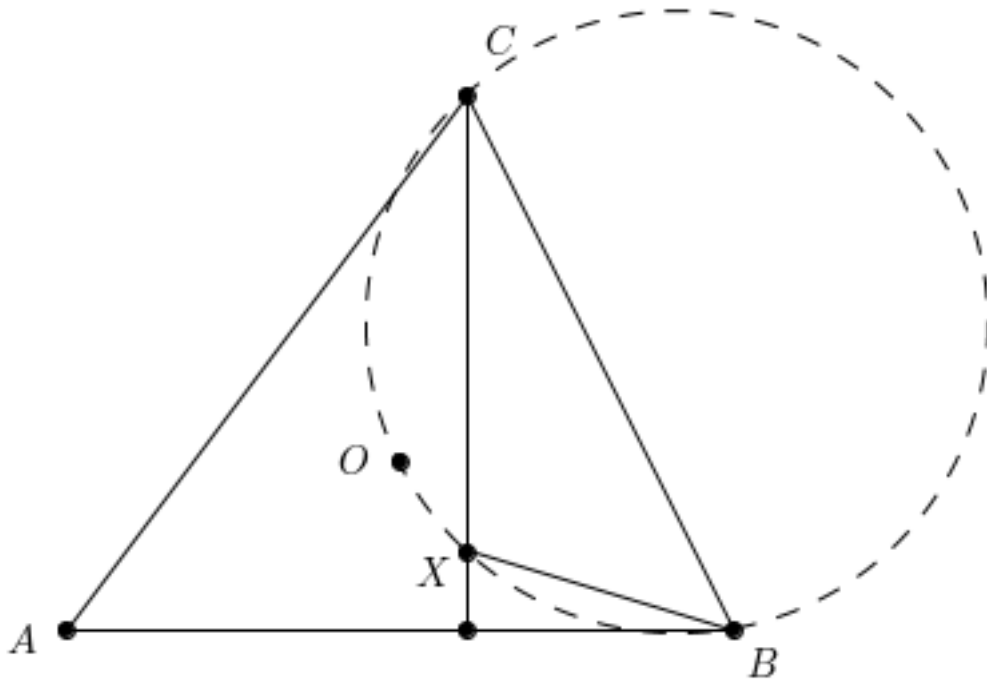
Осталось убедиться, что полученное значение достигается. Это так при $C = 24$, $3 = 20$, $K = 20$.

6. Сколькими способами квадрат 11×11 можно разбить на прямоугольники, среди которых есть по два вертикальных и по два горизонтальных прямоугольника 1×10 , 1×8 , \dots , 1×2 и один квадрат 1×1 ?

Ответ. 32. Решение. Заметим, что если вертикальный прямоугольник 1×10 не прилегает к вертикальному краю квадрата 11×11 , то не получится разместить два горизонтальных прямоугольника 1×10 . Аналогичное утверждение верно и для горизонтальных прямоугольников. Тогда есть только два способа разместить четыре прямоугольника 1×10 при этом остается незанятым квадрат 9×9 .

Для квадрата 9×9 и прямоугольников 1×8 верны те же самые рассуждения, как и для всех последующих квадратов. Т.е. на каждом шаге рассуждений у нас есть по два варианта, как могут быть расположены прямоугольники, откуда ответ $2^5 = 32$.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , все углы которого измеряются целым числом градусов. Точка X внутри треугольника такова, что $CX \perp AB$ и $\angle ABX : \angle XBC = 2 : 3$. Оказалось, что точки B, O, X, C лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать величина угла $\angle A$? Напомним, что остроугольным называется треугольник, каждый угол которого строго меньше 90° .



Ответ. 62. Решение. Поскольку O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC , а центральный угол в два раза больше вписанного, $\angle BOC = 2\angle A$. Поскольку четырехугольник $BXOC$ вписанный, а углы $\angle BOC$ и $\angle BXC$ опираются на одну дугу, $\angle BOC = \angle BXC$. Наконец, $\angle BXC$ — внешний к треугольнику с вершинами в точках B , X и основание высоты из вершины C на AB , т.е.

$$\angle BXC = 90^\circ + \angle ABX = 90^\circ + \frac{2}{5}\angle B.$$

Значит,

$$\angle A = \frac{1}{2}\angle BOX = \frac{1}{2}\angle BXC = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{2}{5}\angle B\right) < \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{2}{5} \cdot 90^\circ\right) = 63^\circ.$$

Следовательно, наибольшее значение величины угла $\angle A$ равно 62° . Осталось убедиться, что такое значение достигается. Из условия $\angle A = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{2}{5}\angle B\right)$ получаем $\angle B = 85^\circ$ и $\angle C = 33^\circ$.

8. Для натуральных чисел a и b обозначим через $f(a, b)$ наименьшее натуральное число c такое, что $\text{НОД}(a, c) > 1$ и $\text{НОД}(b, c) > 1$. Натуральные числа x , y и z таковы, что $f(x, y) = 505$, $f(y, z) = 707$. Сколько значений может принимать $f(x, z)$?

Ответ. 9. Решение. Опишем функцию $f(a, b)$. Если $f(a, b)$ делится на простой делитель p , такой, что и a и b делятся на p , то $f(a, b) = p$. Если таких делителей нет, то каждый простой делитель $f(a, b)$ это либо простой делитель a , либо простой делитель b . В этом случае в качестве значения $f(a, b)$ можно взять pq , где p — наименьший простой делитель a , q — наименьший простой делитель b . В частности это означает,

что из $f(x, y) = 505$ следует, что одно из чисел x, y имеет наименьший простой множитель 5 и не делится на 101, а другое имеет наименьший простой множитель 101.

Далее рассмотрим два случая.

1) y делится на 101. Тогда наименьший простой делитель числа x равен 5, а числа z — 7. Далее есть два подслучая.

1а) Если $f(x, z)$ составное, то оно равно $5 \cdot 7$ и такое достигается при $x = 5, y = 101, z = 7$.

1б) Если $f(x, z)$ равно простому числу p . Так как x и z делятся на p , то $p \geq 7$. С другой стороны $p \leq 35$, так как число 35 подходит на роль числа не взаимно простого и с x и z . Т.е. p равно одному из чисел 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Все эти значения достижимы, например, при $x = 5p, y = 101, z = 7p$.

2) y не делится на 101. Тогда x, z делятся на 101, а y делится на 35. Но тогда $f(y, z) = 505$ или меньше. Поэтому этот случай не реализуется.

Всего получилось $1 + 8 = 9$ вариантов.

Информация о вариантах

1-1. Жора бежит дистанцию в 100 метров. Он стартует со скоростью один метр в секунду, но, к сожалению, довольно быстро утомляется. После каждых 11 метров пути Жора решает, что надо бежать в два раза медленней. Сколько секунд пройдёт, прежде чем Жора достигнет финиша?

Ответ. 6133.

1-2. Жора бежит дистанцию в 100 метров. Он стартует со скоростью один метр в секунду, но, к сожалению, довольно быстро утомляется. После каждых 12 метров пути Жора решает, что надо бежать в два раза медленней. Сколько секунд пройдёт, прежде чем Жора достигнет финиша?

Ответ. 4084.

1-3. Жора бежит дистанцию в 100 метров. Он стартует со скоростью один метр в секунду, но, к сожалению, довольно быстро утомляется. После каждых 13 метров пути Жора решает, что надо бежать в два раза медленней. Сколько секунд пройдёт, прежде чем Жора достигнет финиша?

Ответ. 2803.

1-4. Жора бежит дистанцию в 100 метров. Он стартует со скоростью один метр в секунду, но, к сожалению, довольно быстро утомляется. После каждых 14 метров пути Жора решает, что надо бежать в два раза медленней. Сколько секунд пройдёт, прежде чем Жора достигнет финиша?

Ответ. 2034.

2-1. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = c_1$ в точках $(10, c_1)$ и $(20, c_1)$, а прямую $y = c_2$ — в точках $(7, c_2)$ и (x_0, c_2) . Найдите число x_0 .

Ответ. 23

2-2. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = c_1$ в точках $(11, c_1)$ и $(23, c_1)$, а прямую $y = c_2$ — в точках $(8, c_2)$ и (x_0, c_2) . Найдите число x_0 .

Ответ. 26.

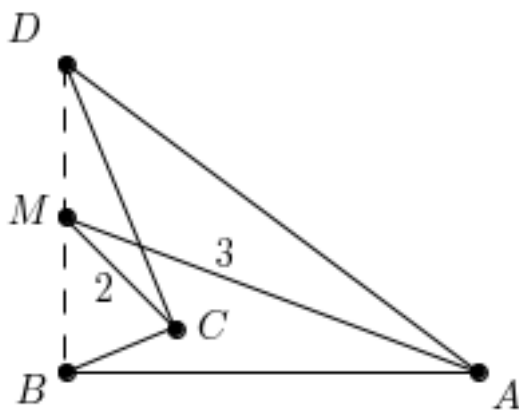
2-3. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = c_1$ в точках $(13, c_1)$ и $(25, c_1)$, а прямую $y = c_2$ — в точках $(6, c_2)$ и (x_0, c_2) . Найдите число x_0 .

Ответ. 32.

2-4. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ пересекает прямую $y = c_1$ в точках $(14, c_1)$ и $(22, c_1)$, а прямую $y = c_2$ — в точках $(11, c_2)$ и (x_0, c_2) . Найдите число x_0 .

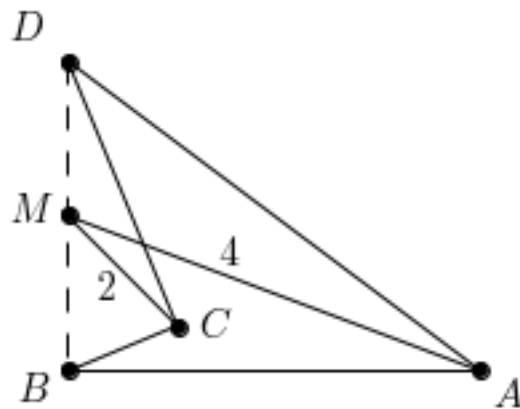
Ответ. 25.

3-1. Вершина C невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABD . Известно, что $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Пусть M — середина диагонали BD . Известно, что $AM = 3$, $CM = 2$. Найдите AD^2 .



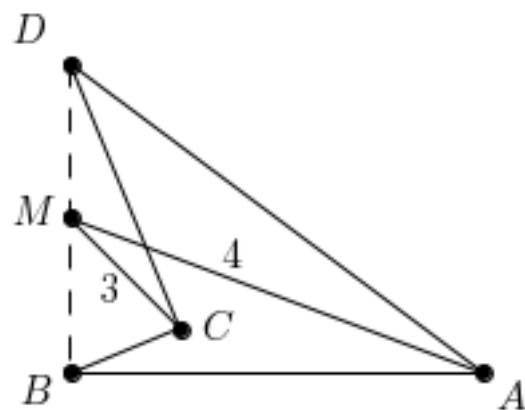
Ответ. 21.

3-2. Вершина C невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABD . Известно, что $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Пусть M — середина диагонали BD . Известно, что $AM = 4$, $CM = 2$. Найдите AD^2 .



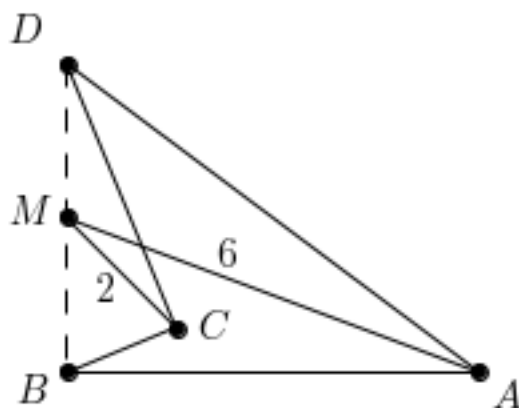
Ответ. 28.

3-3. Вершина C невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABD . Известно, что $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Пусть M — середина диагонали BD . Известно, что $AM = 4$, $CM = 3$. Найдите AD^2 .



Ответ. 43.

3-4. Вершина C невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABD . Известно, что $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Пусть M — середина диагонали BD . Известно, что $AM = 6$, $CM = 2$. Найдите AD^2 .



Ответ. 48.

4-1. Линейная функция $p(x) = kx + \ell$ такова, что для некоторого действительного a выполнено
 $p(a) = 2$, $p(p(a)) = 17$, $p(p(p(a))) = 167$.

Найдите a .

Ответ. $1/2$.

4-2. Линейная функция $p(x) = kx + \ell$ такова, что для некоторого действительного a выполнено
 $p(a) = 3$, $p(p(a)) = 18$, $p(p(p(a))) = 138$.

Найдите a .

Ответ. $9/8$.

4-3. Линейная функция $p(x) = kx + \ell$ такова, что для некоторого действительного a выполнено

$$p(a) = 2, \quad p(p(a)) = 18, \quad p(p(p(a))) = 178.$$

Найдите a .

Ответ. $2/5$.

4-4. Линейная функция $p(x) = kx + \ell$ такова, что для некоторого действительного a выполнено

$$p(a) = 3, \quad p(p(a)) = 17, \quad p(p(p(a))) = 87.$$

Найдите a .

Ответ. $1/5$.

5-1. В коробке лежат n шариков трёх цветов: красного, синего и зелёного. Если достать из неё любые 52 шарика, то среди них обязательно окажется по крайней мере 12 синих и хотя бы по 8 красных и зелёных. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. 64.

5-2. В коробке лежат n шариков трёх цветов: красного, синего и зелёного. Если достать из неё любые 61 шарик, то среди них обязательно окажется по крайней мере 15 синих и хотя бы по 7 красных и зелёных. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. 77

5-3. В коробке лежат n шариков трёх цветов: красного, синего и зелёного. Если достать из неё любые 57 шариков, то среди них обязательно окажется по крайней мере 11 синих и хотя бы по 9 красных и зелёных. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. 71.

5-4. В коробке лежат n шариков трёх цветов: красного, синего и зелёного. Если достать из неё любые 62 шарика, то среди них обязательно окажется по крайней мере 14 синих и хотя бы по 7 красных и зелёных. При каком наибольшем n такое возможно?

Ответ. 79.

6-1. Сколькими способами квадрат 11×11 можно разбить на прямоугольники, среди которых есть по два вертикальных и по два горизонтальных прямоугольника 1×10 , 1×8 , \dots , 1×2 и один квадрат 1×1 ?

Ответ. 32.

6-2. Сколькими способами квадрат 13×13 можно разбить на прямоугольники, среди которых есть по два вертикальных и по два горизонтальных прямоугольника 1×12 , 1×10 , \dots , 1×2 и один квадрат 1×1 ?

Ответ. 64.

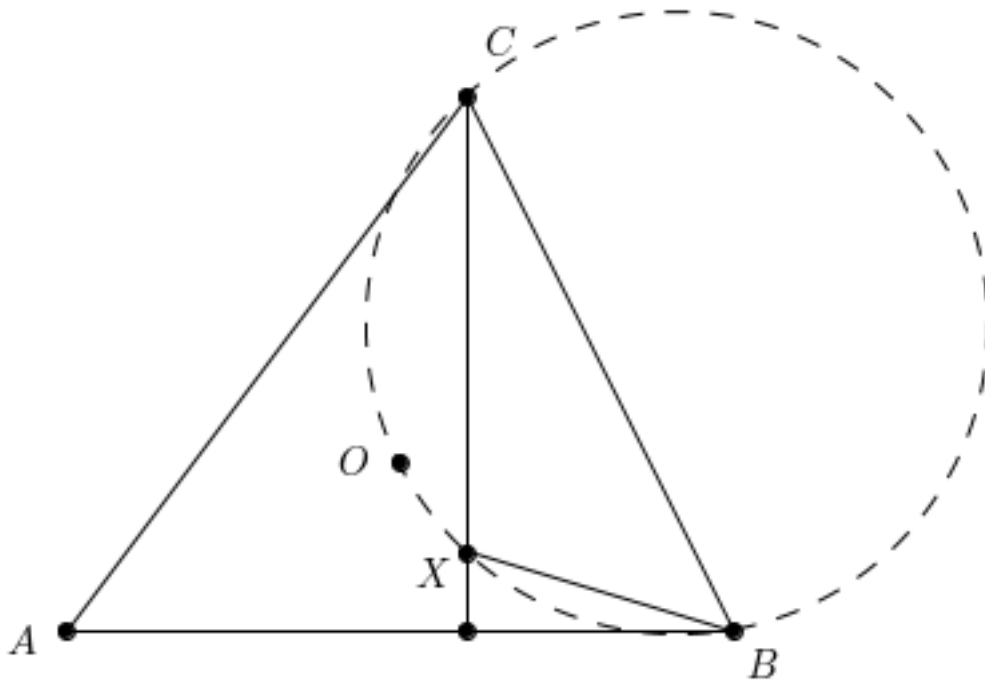
6-3. Сколькими способами квадрат 15×15 можно разбить на прямоугольники, среди которых есть по два вертикальных и по два горизонтальных прямоугольника 1×14 , 1×12 , \dots , 1×2 и один квадрат 1×1 ?

Ответ. 128.

6-4. Сколькими способами квадрат 17×17 можно разбить на прямоугольники, среди которых есть по два вертикальных и по два горизонтальных прямоугольника 1×16 , 1×14 , \dots , 1×2 и один квадрат 1×1 ?

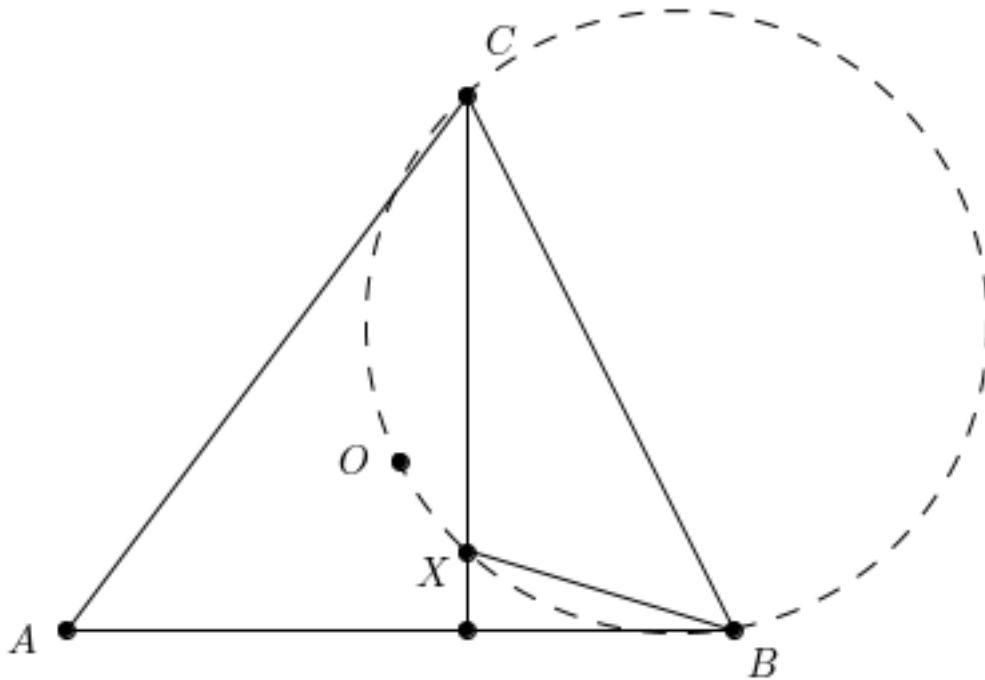
Ответ. 256.

7-1. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , все углы которого измеряются целым числом градусов. Точка X внутри треугольника такова, что $CX \perp AB$ и $\angle ABX : \angle XBC = 2 : 3$. Оказалось, что точки B , O , X , C лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать величина угла $\angle A$? Напомним, что остроугольным называется треугольник, каждый угол которого строго меньше 90° .



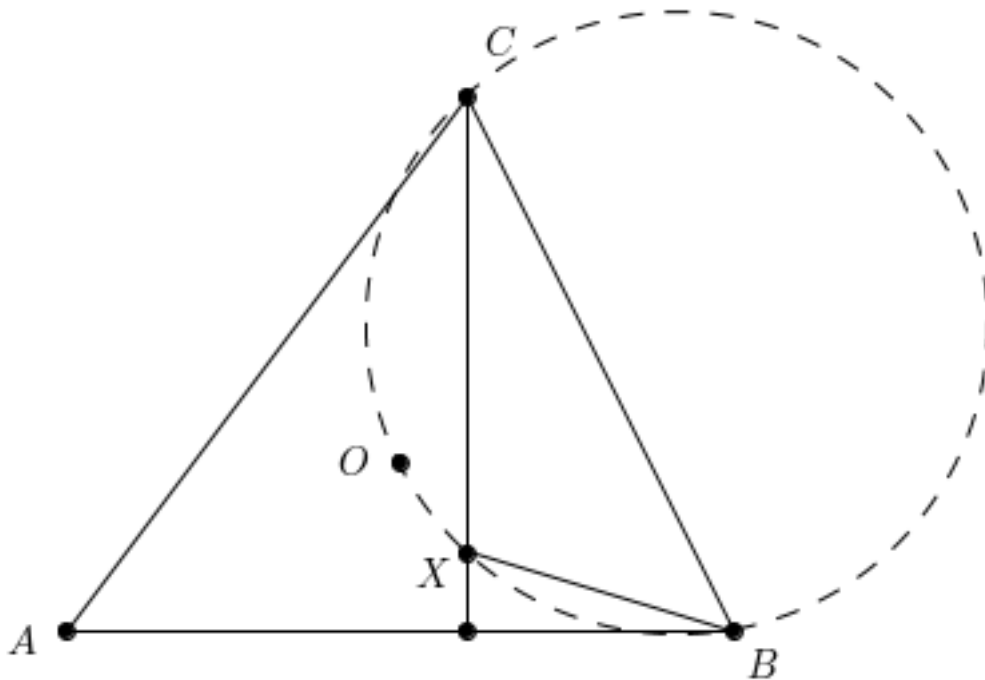
Ответ. 62.

7-2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , все углы которого измеряются целым числом градусов. Точка X внутри треугольника такова, что $CX \perp AB$ и $\angle ABX : \angle XBC = 2 : 5$. Оказалось, что точки B, O, X, C лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать величина угла $\angle A$? Напомним, что остроугольным называется треугольник, каждый угол которого строго меньше 90° .



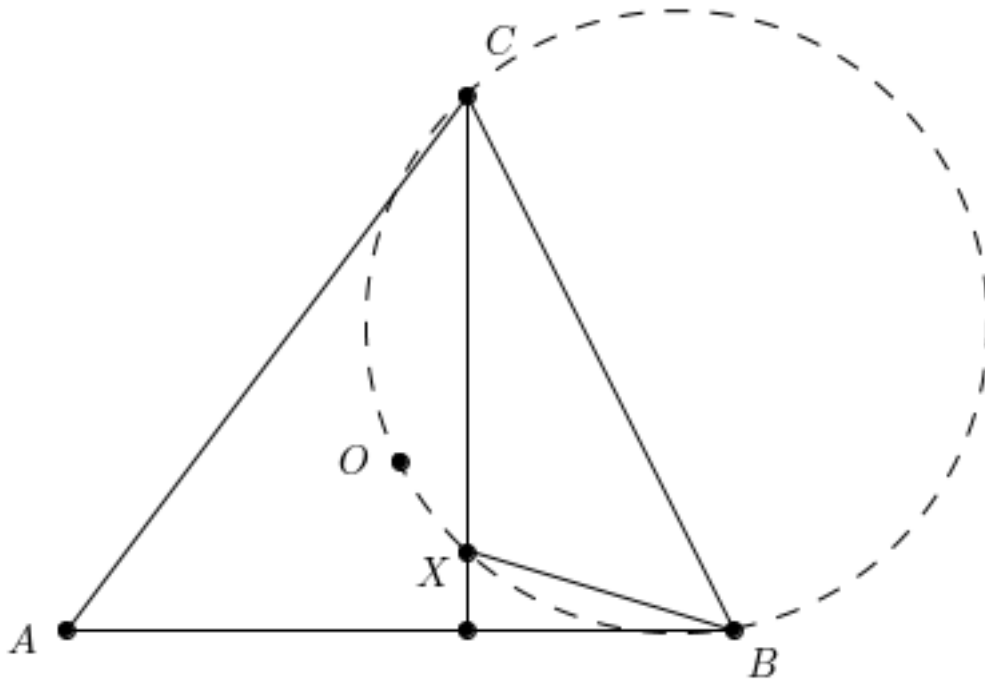
Ответ. 57.

7-3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , все углы которого измеряются целым числом градусов. Точка X внутри треугольника такова, что $CX \perp AB$ и $\angle ABX : \angle XBC = 3 : 5$. Оказалось, что точки B, O, X, C лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать величина угла $\angle A$? Напомним, что остроугольным называется треугольник, каждый угол которого строго меньше 90° .



Ответ. 61.

7-4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , все углы которого измеряются целым числом градусов. Точка X внутри треугольника такова, что $CX \perp AB$ и $\angle ABX : \angle XBC = 1 : 3$. Оказалось, что точки B, O, X, C лежат на одной окружности. Какое наибольшее значение может принимать величина угла $\angle A$? Напомним, что остроугольным называется треугольник, каждый угол которого строго меньше 90° .



Ответ. 56.

8-1. Для натуральных чисел a и b обозначим через $f(a, b)$ наименьшее натуральное число c такое, что $\text{НОД}(a, c) > 1$ и $\text{НОД}(b, c) > 1$. Натуральные числа x, y и z таковы, что $f(x, y) = 505$, $f(y, z) = 707$. Сколько значений может принимать $f(x, z)$?

Ответ. 9.

8-2. Для натуральных чисел a и b обозначим через $f(a, b)$ наименьшее натуральное число c такое, что $\text{НОД}(a, c) > 1$ и $\text{НОД}(b, c) > 1$. Натуральные числа x, y и z таковы, что $f(x, y) = 303$, $f(y, z) = 707$. Сколько значений может принимать $f(x, z)$?

Ответ. 6.

8-3. Для натуральных чисел a и b обозначим через $f(a, b)$ наименьшее натуральное число c такое, что $\text{НОД}(a, c) > 1$ и $\text{НОД}(b, c) > 1$. Натуральные числа x , y и z таковы, что $f(x, y) = 303$, $f(y, z) = 1111$. Сколько значений может принимать $f(x, z)$?

Ответ. 8.

8-4. Для натуральных чисел a и b обозначим через $f(a, b)$ наименьшее натуральное число c такое, что $\text{НОД}(a, c) > 1$ и $\text{НОД}(b, c) > 1$. Натуральные числа x , y и z таковы, что $f(x, y) = 505$, $f(y, z) = 1111$. Сколько значений может принимать $f(x, z)$?

Ответ. 13.